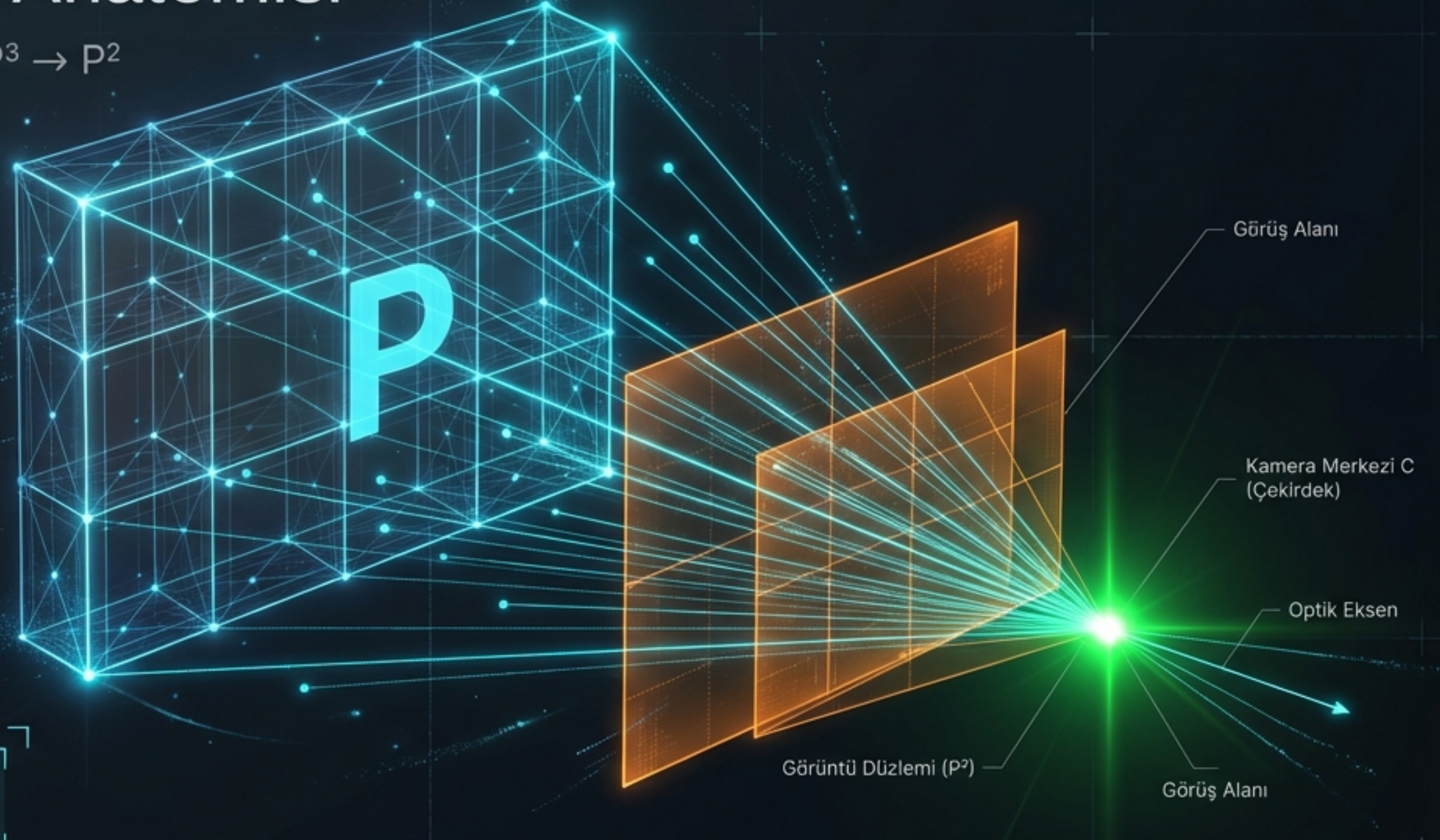


Kamera Projeksiyon Matrisi P'nin Geometrik Anatomisi

Satır ve Sütun Vektörlerinin $P^3 \rightarrow P^2$
İzdüşümündeki Rolü ve
Çekirdek (Null-Space) Analizi



Hartley-Zisserman Çerçevesinde
Projektif Anatomi

P Matrisi: Cebirsel Bir Kara Kutu Değil, Geometrik Bir Harita

P , 3B projektif uzayı (P^3) 2B projektif düzleme (P^2) haritalayan 11 serbestlik derecesine sahip, rank-3 bir lineer dönüşümdür.

$$x = P X$$

Sütun Bölümlemesi

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix}$$

Sütunlar (Mavi): Görüntü düzlemindeki 2B noktaları ve izdüşüm ışınlarını temsil eder.

Satır Bölümlemesi

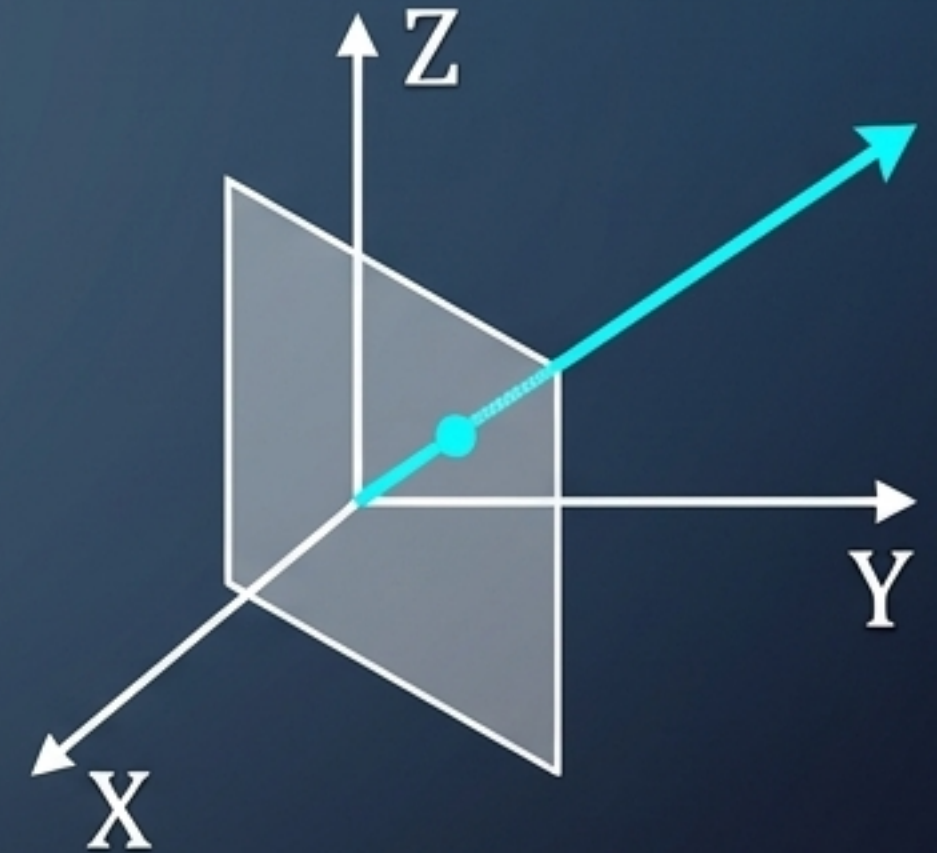
$$P = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ P_3^T \end{bmatrix}$$

Satırlar (Turuncu): 3B uzayda yer alan ve kamera merkeziyle tanımlanan uzamsal düzlemleri temsil eder.

Sütun Uzayının Anlamı (The Column Space)

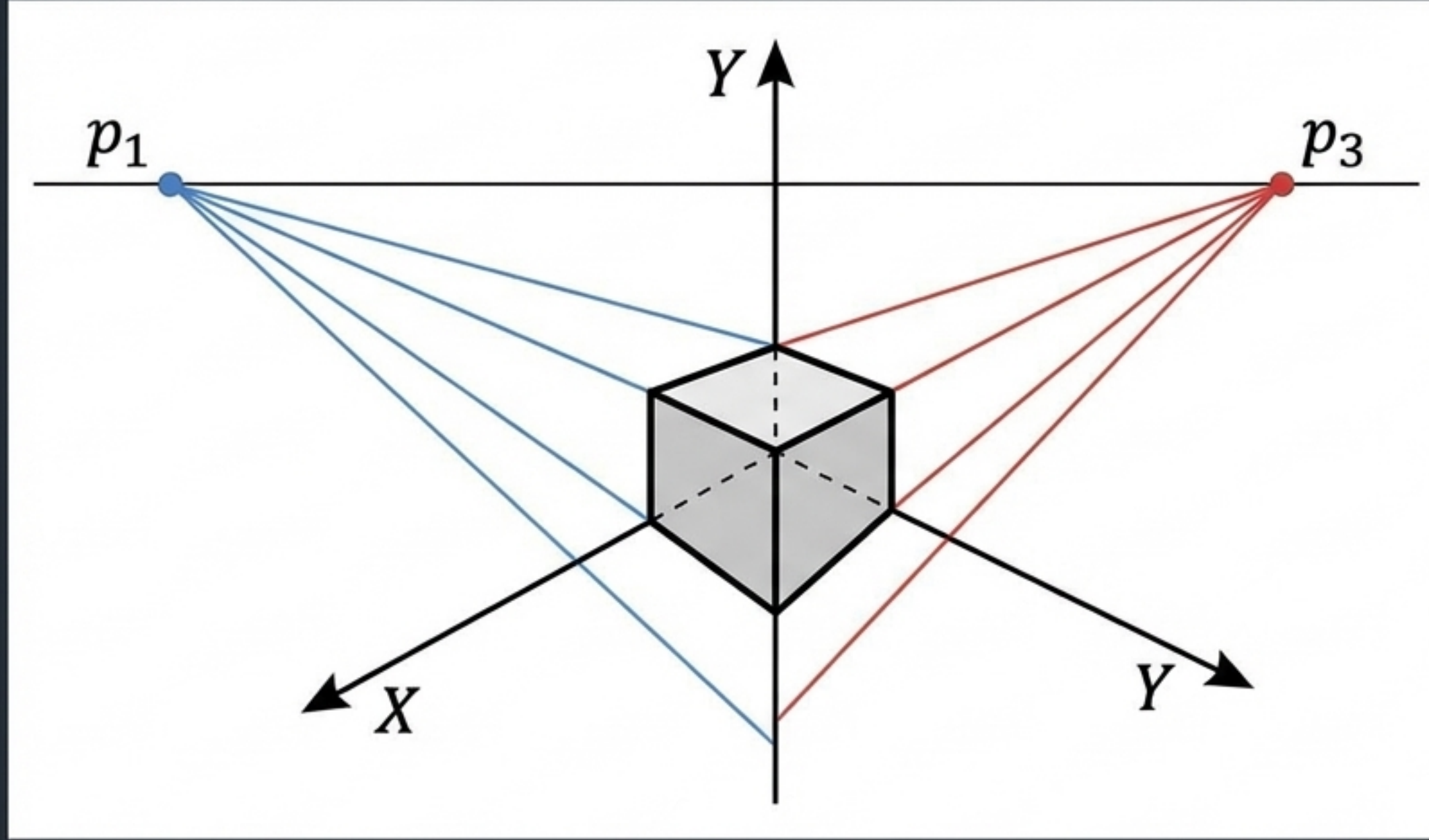
$$\mathbf{x}_i = \mathbf{P}\mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{p}_1$$



$\mathbf{P}$ 'nin her bir sütunu, dünya koordinat sisteminin temel (basis) vektörlerinin ($\mathbf{E}_i$) görüntü düzlemindeki mutlak izdüşümleridir. Cebirsel olarak matrisin i -inci sütununu izole etmek, geometrik olarak o eksenin görüntüsünü bulmak demektir.

p_1, p_2, p_3 — Dünya Eksenlerinin Kaçış Noktaları



X-Eksen:

Eksenlerinin kaçış kaçış noktaları.

Y-Eksen:

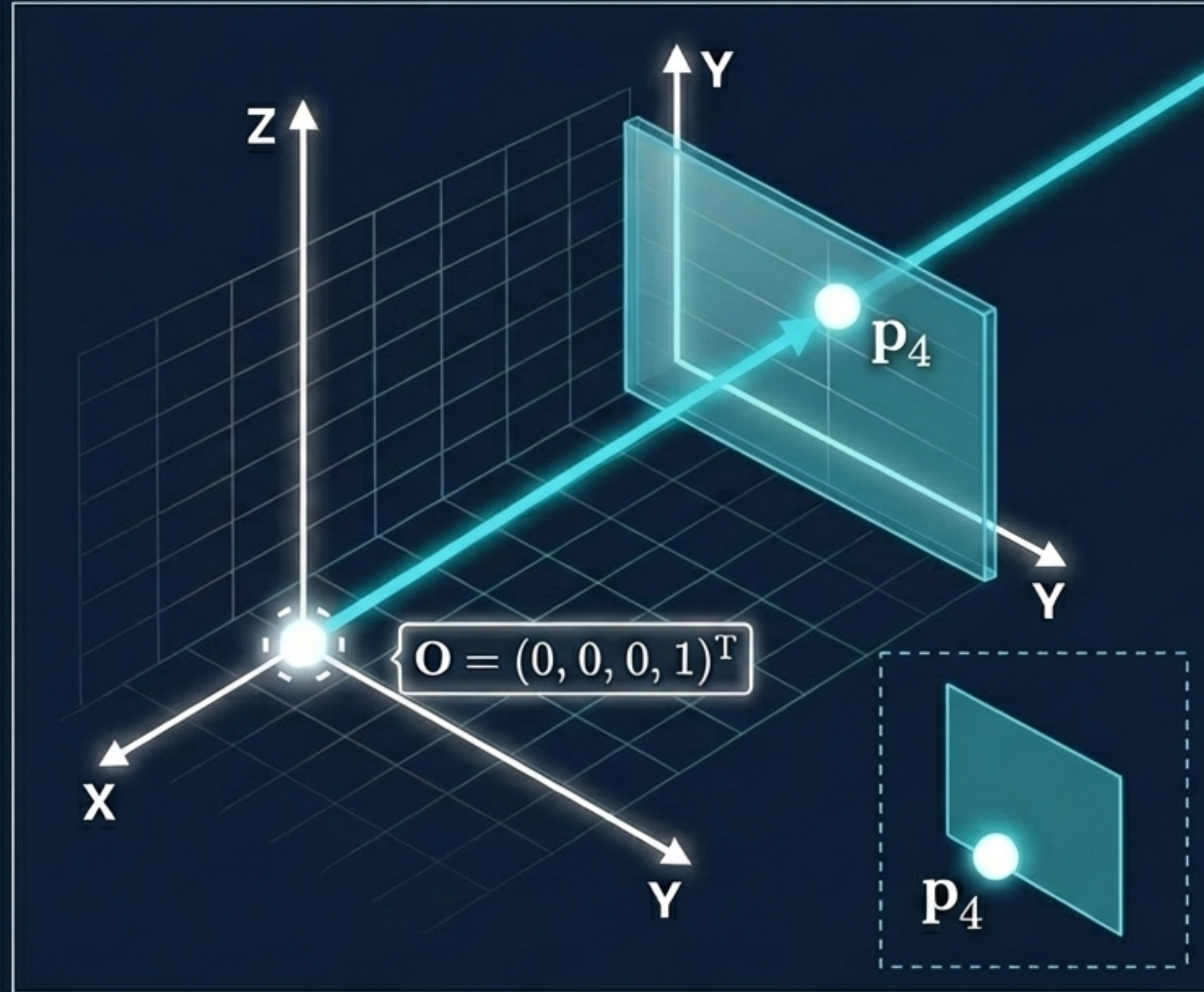
Eksenlerinin kaçış kaçış noktaları.

Z-Eksen:

Eksenlerinin kaçış kaçış noktaları.

Anahtar Çıkarım: İlk üç sütun salt nokta değil, X, Y ve Z eksenlerinin uzaydaki yönelimlerinin **yönümlirilin** (directions at infinity) **perspektif kaçış noktalarıdır** (vanishing points).

p_4 — Dünyanın Merkezinin Görüntüsü



$$p_4 = P [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

Dördüncü sütun p_4 , dünya koordinat sisteminin merkezinin (sonlu nokta) görüntü düzlemindeki mutlak konumudur.



Kritik Not: Sonsuzdaki yönelimleri kodlayan ilk üç sütunun aksine, p_4 sistemin uzaysal çapasını (anchor) belirler. Kameranın yönelimine bağlı olarak görüntü çerçevesinin dışında kalabilir.

Sütunların Sentezi: Cebirsel Girdiden Geometrik Çıktıya

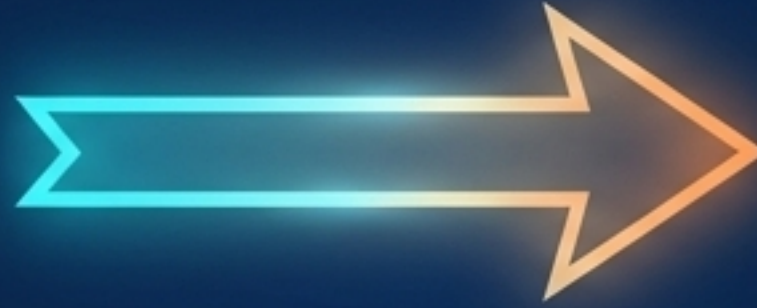
Girdi (3B Vektör)	Geometrik Tanım	Cebirsel İşlem	Çıktı (2B)	Geometrik Anlam
$(1,0,0,0)^T$	X yönü (Sonsuzda)	PD_X	p_1	X Ekseninin Yok Oluş Noktası
$(0,1,0,0)^T$	Y yönü (Sonsuzda)	PD_Y	p_2	Y Ekseninin Yok Oluş Noktası
$(0,0,1,0)^T$	Z yönü (Sonsuzda)	PD_Z	p_3	Z Ekseninin Yok Oluş Noktası
$(0,0,0,1)^T$	Orijin (Sonlu)	PO	p_4	Uzay Orijininin Görüntüsü

Satır Uzayına Geçiş: Projektif Düalite (Duality)

Sütunlar noktaları (points) üretirken, satırlar uzaydaki düzlemleri (planes) tanımlar.



$$\mathbf{P}_i^T \mathbf{X} = 0$$



Matematiksel Temel:

$$\mathbf{x} = (x, y, w)^T$$

$$x = \mathbf{P}_1^T \mathbf{X}$$

$$y = \mathbf{P}_2^T \mathbf{X}$$

$$w = \mathbf{P}_3^T \mathbf{X}$$

Geometrik Çıkarım:

Homojen koordinatlarda herhangi bir iç çarpımın sıfıra eşitlenmesi ($\mathbf{P}_i^T \mathbf{X} = 0$), uzayda bir noktalar kümesi (düzlem) tanımlar. $\mathbf{P}$ 'nin satırları birer 3B düzlem katsayısıdır (plane coefficients).

P_3 — Ana Düzlem (Principal Plane)

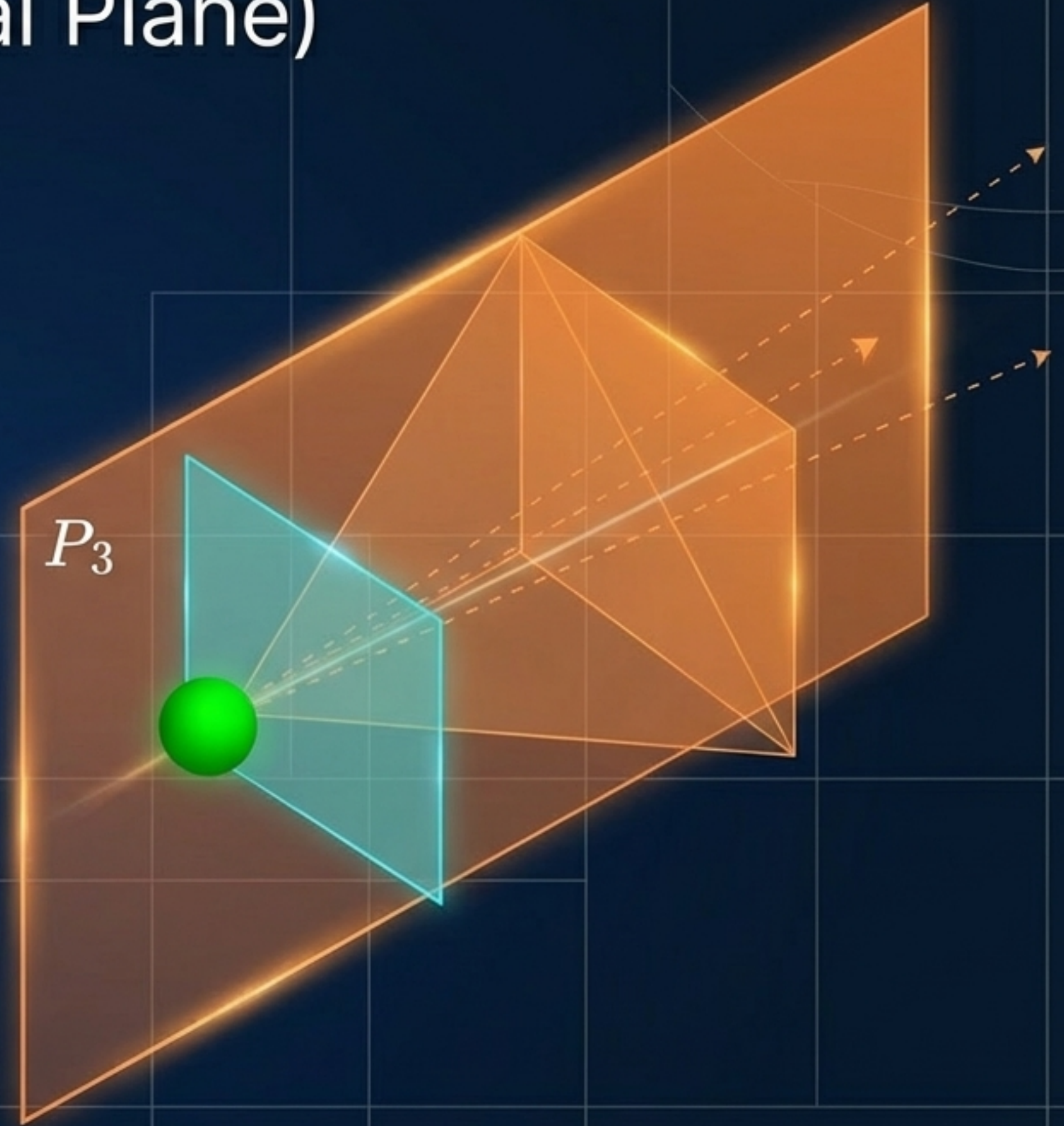
Mekanizma:

Görüntüde sonsuzdaki doğruya (line at infinity, $w=0$) izdüşen noktalar kümesini inceleyelim:

$$\mathbf{x} = (x, y, 0)^T \implies \mathbf{P}_3^T \mathbf{X} = 0$$

Tanım:

P_3 , kamera merkezinden geçen ve görüntü düzlemine tamamen paralel olan uzamsal düzlemdir. Bu düzlem üzerindeki her fiziksel nokta, kameranın optik ufkunun ötesinde, görüntünün sonsuzunda kaybolur.



P_1 ve P_2 — Eksen Düzlemleri (Axis Planes)

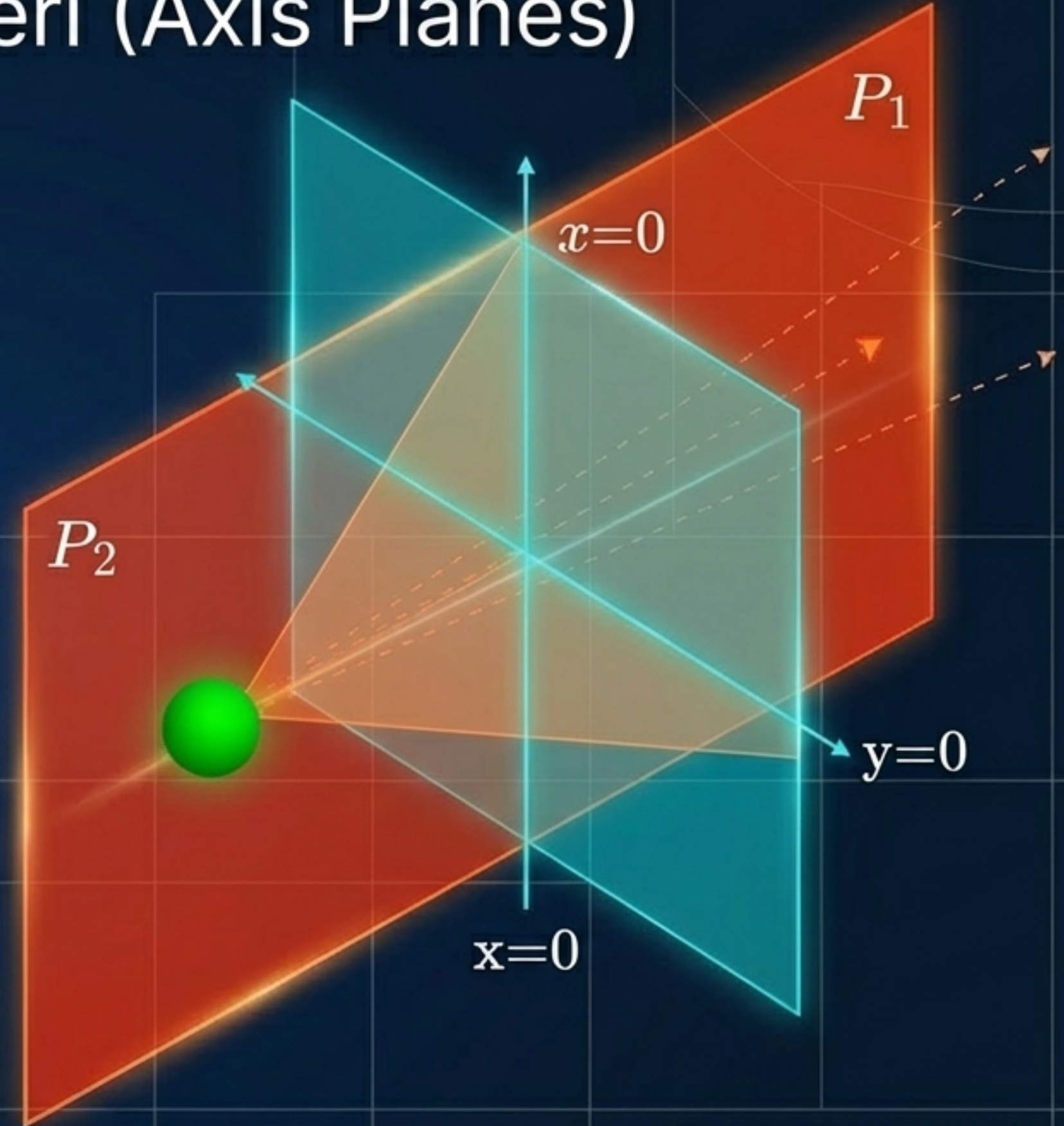
Analiz:

$P_1^T \mathbf{X} = 0 \Rightarrow x = 0$: Görüntüde y-eksenine (düşey eksen) izdüşen uzay noktalarının oluşturduğu düzlem.

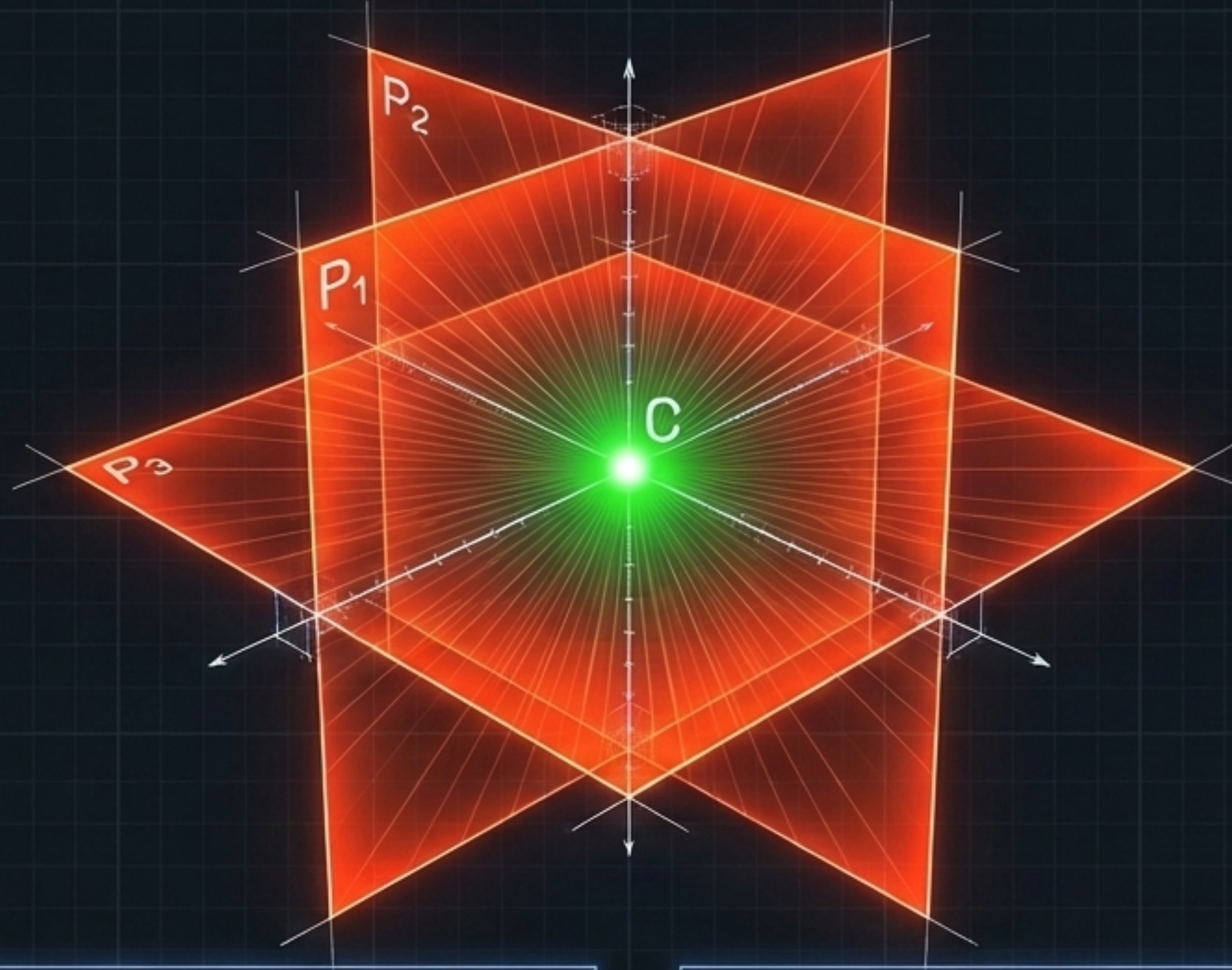
$P_2^T \mathbf{X} = 0 \Rightarrow y = 0$: Görüntüde x-eksenine (yatay eksen) izdüşen uzay noktalarının oluşturduğu düzlem.

Tanım:

Kameranın yerel koordinat referansını var eden, çapraz eksen düzlemleridir.



Üç Düzlemin Kesişimi: Sıfır Uzayı (Null-Space)



Ana Mesaj: P_1 , P_2 ve P_3 düzlemleri uzayda rastgele süzülmezler. Geometrik bir zorunluluk olarak kusursuz bir şekilde tek bir noktada kesişmek zorundadırlar.

Odak Noktası: Üç düzlemin ortak kesişim noktası, tüm optik ışınların toplandığı Kamera Merkezi'nin (C) ta kendisidir.

Kamera Merkezi (C)'nin Matematiksel Kanıtı (Bölüm 1)

Cebirsel Kanıt:

$\mathbf{P}$ matrisi 3×4 boyutunda ve rank-3'tür. Geometrik boyut teoremine göre sağ çekirdek uzayı (null-space) 1 boyutludur.

$\mathbf{P}_C = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan benzersiz bir $\mathbf{C}$ 4-vektörü vardır.

$$\text{Boyut}(4) - \text{Rank}(3) = \text{Null}(1)$$

Düzlem Kesişimi ile Doğrulama:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T \\ \mathbf{P}_2^T \\ \mathbf{P}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

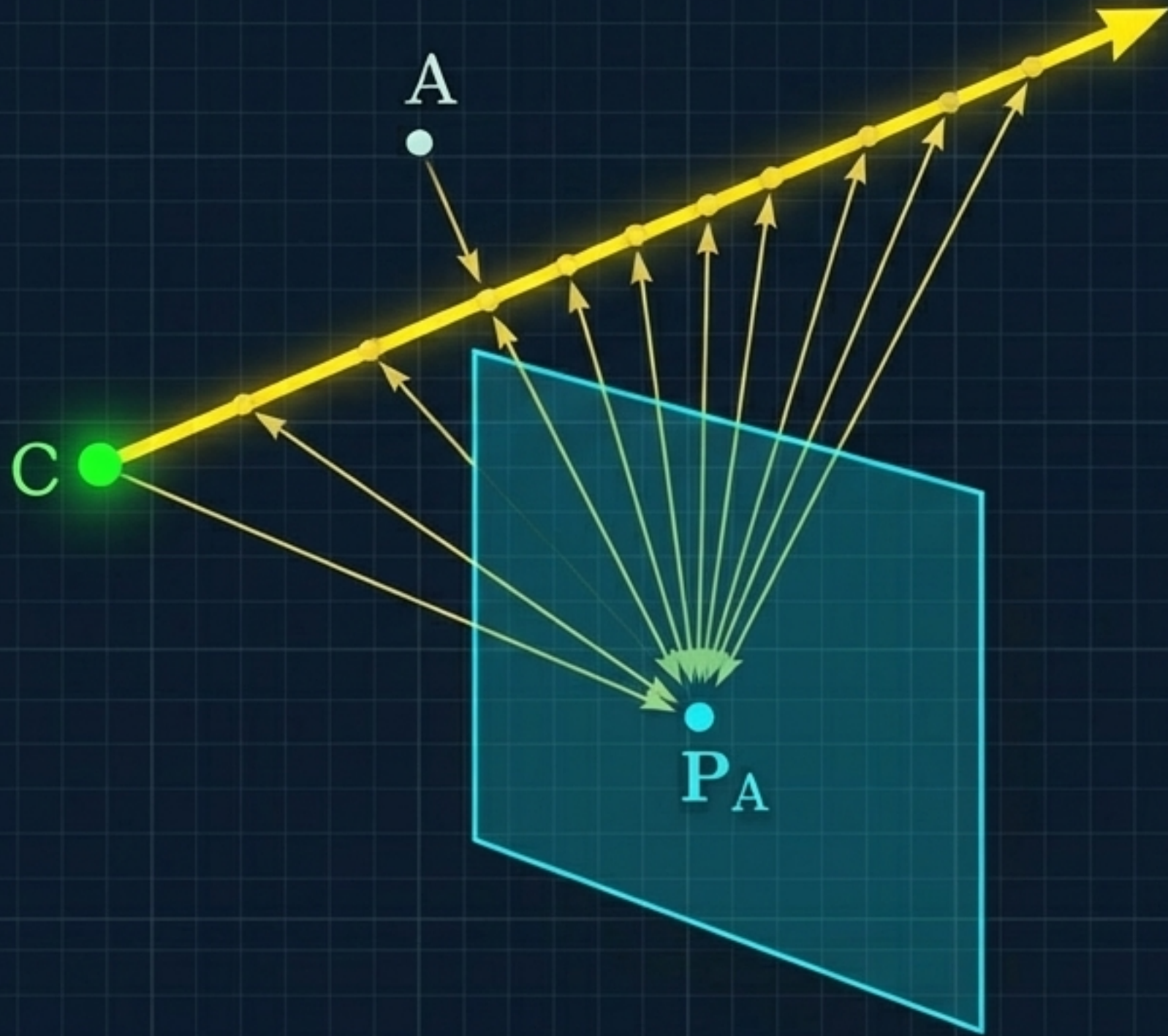
$$\mathbf{P}_1^T \mathbf{C} = 0$$

$$\mathbf{P}_2^T \mathbf{C} = 0$$

$$\mathbf{P}_3^T \mathbf{C} = 0$$

Sonuç: $\mathbf{C}$ noktası, her üç matris düzleminin de eşzamanlı olarak üzerinde (sıfır yüzeyinde) yer almaktadır.

Neden $PC=0$ Kamera Merkezidir? (Bölüm 2)



Hartley-Zisserman İspatı

Uzayda $\mathbf{C}$ ve rastgele bir $\mathbf{A}$ noktasından geçen bir ışın tanımlayalım:

$$\mathbf{X}(\lambda) = \lambda \mathbf{A} + (1 - \lambda) \mathbf{C}$$

Bu ışını izdüşürelim:

$$\mathbf{PX}(\lambda) = \lambda \mathbf{PA} + (1 - \lambda) \mathbf{PC}$$

$\mathbf{PC} = 0$ olduğu için:

$$\mathbf{PX}(\lambda) = \lambda \mathbf{PA} \equiv \mathbf{PA}$$

(Homojen ölçek farkı önemsizdir)

Geometrik Gerçek: Bu ışın üzerindeki tüm noktalar tek bir görüntü noktasına ($\mathbf{P_A}$) çöker. Bu, merkezi izdüşümün ta kendisidir.

Görüntüsü Tanımsız Olan Tek Nokta

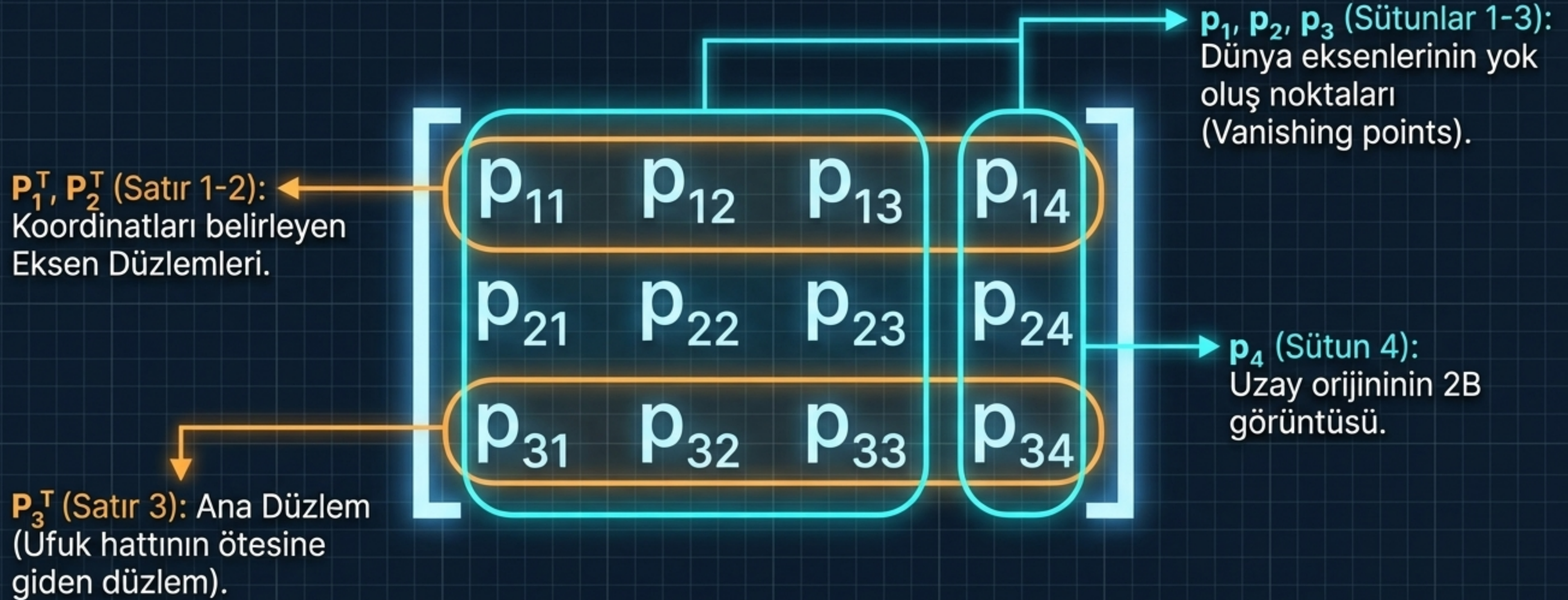


Doktora Seviyesi Vurgu: $P_C = (0,0,0)^T$ vektörü, P^2 projektif düzleminde geçerli bir matematiksel nokta değildir.

Paradoks ve Çözüm: Kamera merkezi, uzayda görüntüsü tanımsız (undefined) olan tek fiziksel noktadır.
Gözün kendi kendini görememesi gibi, merkezin kendi üzerine izdüşümü imkansızdır.

Cebirsel sistemdeki bu benzersiz anomali (0 vektörü), bize geometrik merkezin en zarif matematiksel ispatını sunar.

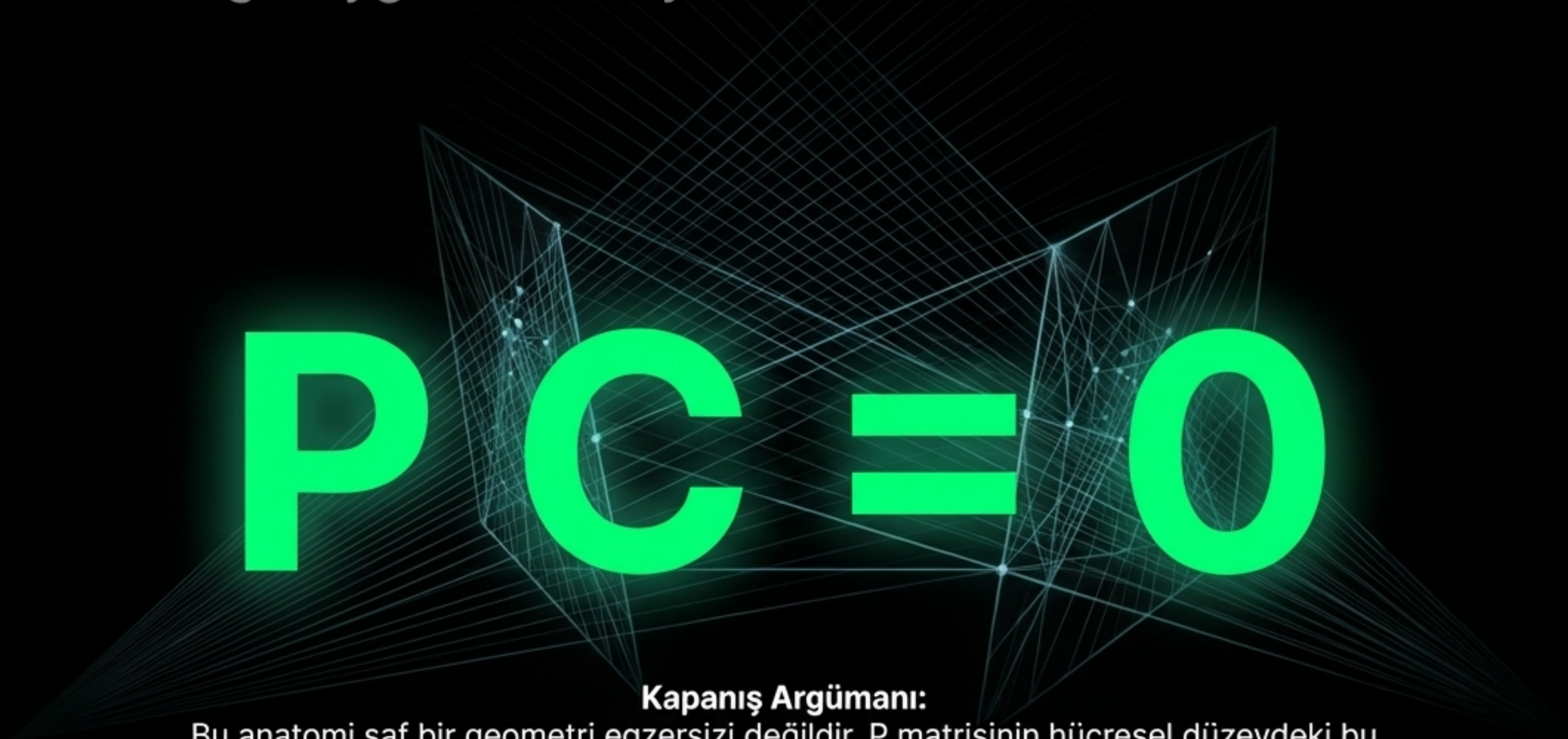
P Matrisi: İzdüşümün Diagnostik Anatomisi (Sentez)



Null($\mathbf{P}$): Her şeyin başladığı ve birleştiği tekil nokta $\rightarrow$ Kamera Merkezi ($\mathbf{C}$).

$$\mathbf{P} \times \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

Işığın Matematiği: Uygulama Vizyonu


$$P C = O$$

Kapanış Argümanı:

Bu anatomi saf bir geometri egzersizi değildir. P matrisinin hücresel düzeydeki bu mimarisi; modern kamera kalibrasyonu, ters izdüşüm (back-projection), Plücker çizgi izdüşümleri ve çoklu görünüm (epipolar) geometrisinin belkemiğidir.

Son Söz:

3×4'lük bir matrisi anlamak, ışığın uzaydaki milyonlarca yıllık yolculuğunu tek bir denklemde durdurup inceleyebilmektir.